REVISTA ARBITRADA DEL CIEG - CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS GERENCIALES (BARQUISIMETO - VENEZUELA) ISSN: 2244-8330 DEPÓSITO LEGAL: ppi201002LA3492 / RAMÍREZ RODRÍGUEZ, ORLANDO / GEOMETRÍA PLANA, GEOMETRÍA ESPACIAL Y FRACTALES: FUNDAMENTOS FILOSÓFICOS DE UNA RACIONALIDAD ESPACIAL EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA / PLANE GEOMETRY, SPATIAL GEOMETRY, AND FRACTALS: PHILOSOPHICAL FOUNDATIONS OF A SPATIAL RATIONALITY IN MATHEMATICS EDUCATION / Número 82 noviembre-diciembre 2026 [páginas 13-26] FECHA DE RECEPCIÓN: 30junio2026/FECHA DE ACEPTACIÓN: 25agosto2026.

GEOMETRÍA PLANA, GEOMETRÍA ESPACIAL Y FRACTALES: FUNDAMENTOS FILOSÓFICOS DE UNA RACIONALIDAD ESPACIAL EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Ramírez Rodríguez, Orlando [1]

RESUMEN

El presente artículo científico analiza la geometría plana, geometría espacial y el fractal como expresiones articuladas de una racionalidad espacial que se transforma históricamente y que posee consecuencias relevantes para la educación matemática. Su propósito es examinar cómo distintas concepciones filosóficas y epistemológicas del racionalismo asociado a Euclides, el idealismo trascendental de Kant, el constructivismo de Piaget e Inhelder y el modelo de razonamiento geométrico de van Hiele y el cuasi-empirismo de Lakatos, permiten comprender de manera más amplia la naturaleza, construcción y validación del conocimiento geométrico. La fundamentación teórica se apoya en fuentes clásicas y contemporáneas sobre geometría, filosofía de la matemática y educación matemática. Metodológicamente, se realizó una revisión documental de carácter cualitativo y argumentativo, articulando aportes teóricos en torno a tres dimensiones: la certeza axiomática de la geometría plana, la construcción progresiva del espacio tridimensional y la complejidad representada por la geometría fractal. El análisis permite sostener que la enseñanza geométrica no debería reducirse a fórmulas, propiedades y procedimientos, puesto que cada decisión didáctica supone una determinada concepción acerca de qué significa conocer matemáticamente.

Palabras clave: geometría; filosofía de la matemática; racionalidad espacial.

ABSTRACT

PLANE GEOMETRY, SPATIAL GEOMETRY, AND FRACTALS: PHILOSOPHICAL FOUNDATIONS OF A SPATIAL RATIONALITY IN MATHEMATICS EDUCATION

This scientific article analyzes plane geometry, spatial geometry, and fractals as articulated expressions of a spatial rationality that transforms historically and holds relevant consequences for mathematics education. Its purpose is to examine how distinct philosophical and epistemological conceptions of the rationalism associated with Euclid, Kant's transcendental idealism, Piaget and Inhelder's constructivism, the van Hiele model of geometric reasoning, and Lakatos's quasi-empiricism allow for a broader understanding of the nature, construction, and validation of geometric knowledge.The theoretical foundation relies on classical and contemporary sources on geometry, philosophy of mathematics, and mathematics education. Methodologically, a qualitative and argumentative document review was conducted, articulating theoretical contributions around three dimensions: the axiomatic certainty of plane geometry, the progressive construction of three-dimensional space, and the complexity represented by fractal geometry. The analysis supports the argument that geometric teaching should not be reduced to formulas, properties, and procedures, since every didactic decision implies a specific conception of what it means to know mathematically.

Keywords: *geometry; philosophy of mathematics; spatial rationality*

[1] https://orcid.org/0000-0001-9609-9751 orlando_825@hotmail.com

1. INTRODUCCIÓN

Al abordar la articulación entre la geometría plana, la geometría espacial y los fractales hoy dia constituyen un recorrido epistemológico profundo, en la forma cómo la humanidad ha concebido, formalizado y enseñado el espacio a lo largo de la historia, por lo cual abordar esto desde los fundamentos filosóficos de la racionalidad espacial en la educación matemática, implica analizar el tránsito desde un universo estático, idealizado y euclideano hacia uno dinámico, complejo y recursivo. En otro orden de ideas, la racionalidad espacial y su génesis epistemológica, en la educación matemática actualmente engloba las estructuras cognitivas, culturales y conceptuales mediante las cuales los sujetos interpretan, organizan y dominan su entorno físico y abstracto.

Por ello puede decirse que el espacio cartesiano y euclideano, ha venido operado históricamente bajo el prisma de la certeza empírico-analítica, enfocado en líneas rectas, planos perfectos, volúmenes regulares y teoremas deductivos cerrados, por lo tanto desde una perspectiva filosófica, esta racionalidad responde a la necesidad de orden, simetría y control lógico del mundo sensible, convirtiéndose en el pilar clásico de los currículos escolares.

De allí la importancia, de utilizar en la clase de matemática elementos de la geometría Plana y Espacial, lo que conduce al Dominio de las Formas Ideales, donde en la educación matemática tradicional, la geometría plana y la espacial representan la cúspide del razonamiento deductivo axiológico.

En tal sentido es importante destacar que el carácter axiomático de la geometría Plana, espacial y fractal, se fundamenta en idealizaciones lo que se conoce como, el punto sin dimensiones o la línea infinita, que no existen en la naturaleza física, pero que permiten construir modelos explicativos universales, con la finalidad formativa de desarrollar la visualización espacial, pensamiento formal y deducción lógica estructurada, aunque tradicionalmente se limita al estudio de objetos estáticos y medidas enteras.

No obstante, ante la pregunta de la naturaleza del espacio, como acción que ha acompañado al pensamiento humano desde las primeras prácticas de medición, orientación, construcción y representación de la realidad, ha permitido la consolidación de la geometría como disciplina matemática, donde las sociedades ya desarrollaban procedimientos para resolver problemas espaciales vinculados con el territorio y la vida cotidiana. Haciéndose observancia que en la Grecia clásica, estas necesidades adquirieron una dimensión racional y filosófica mediante la organización del conocimiento geométrico en definiciones, postulados, nociones comunes y proposiciones, además los elementos de Euclides, (2000) constituyeron

una expresión paradigmática de esta transformación al establecer un modelo axiomático-deductivo que ejerció una influencia prolongada en la cultura matemática occidental.

Tomando en cuenta lo enunciado anteriormente, se visualiza que la ruptura geométrica fractal desde un enfoque de la racionalidad de la complejidad al estar concatenada y acuñada según por Benoît Mandelbrot(2044), al paradigma espacial sufre una transformación radical y desde su naturaleza en el aula escolar, ya no se explica mediante líneas rectas o esferas lisas, sino a través de la irregularidad, el caos determinista y la recursividad. Por ello la geometría fractal desde la autosimilitud y recursividad, exhibe patrones que se repiten a diferentes escalas bien sean micro y macroscópicas desafiando la intuición lineal tradicional.

Sin embargo actualmente, la geometría no puede comprenderse únicamente como un repertorio de figuras, fórmulas y algoritmos, sino como la manera de definir un objeto, demostrar una propiedad e interpretar una representación o decidir qué como evidencia expresa puede determinar ideas acerca de la razón, experiencia y la realidad. Es asi como partiendo desde esta perspectiva, la geometría plana, espacial y la fractal pueden ser interpretadas como momentos diferenciados de una misma racionalidad espacial que pasa de la regularidad y la certeza axiomática hacia la construcción cognitiva de representaciones, y posteriormente hacia la consideración de formas irregulares, complejas y autosimilares, que trasciende la dimensión topológica entera, observando como un objeto fractal posee una dimensión que no es un número entero, que redefine la noción de medida y espacio métrico.

En otro orden de atencion, la geometría desde los fundamentos Filosóficos de una racionalidad espacial en la educación matemática, introduce una racionalidad no lineal que conecta las matemáticas con fenómenos naturales caóticos como las costas, nubes, sistemas biológicos y redes neuronales, evidenciando que el orden subyace la aparente irregularidad a partir de las implicaciones didácticas en la educación matemática, en la búsqueda por integrar estos tres niveles geométricos (Planos, espaciales y fractales) en la praxis pedagógica lo que reconfigura el diseño curricular y estrategias de mediación.

En concordancia con lo anterior referenciado, este artículo científico se orienta en la integración de estas tres perspectivas geométricas enunciada en el parrafo anterior, ello por supuesto puede enriquecer la educación matemática, porque permite presentar el conocimiento espacial como una construcción histórica, racional, cognitiva o revisable, y en esta perspectiva . la geometría plana aporta la fuerza de la deducción, asi como la geometría espacial exige comprender la

construcción de representaciones tridimensionales y la geometría fractal amplía la mirada hacia fenómenos que desbordan las formas regulares tradicionales.

A lo cual Ramírez A y Gómez V (2020), señalan que esta articulación entre geometría, filosofía y razonamiento también ha sido destacada en el conocimiento geométrico como producto de la razón y de su dimensión epistemológica, por lo tanto enseñar geometría implica también enseñar modos de pensar, argumentar, representar y validar. En síntesis puede enunciarse, que a nivel Geométrico la geometría plana, la espacial y la geometría fractal, partiendo de un enfoque epistemológico basado en el reduccionismo analítico y deductivo con modelado de volúmenes y tridimensionalidad, aporta beneficios a la educación matemática, para el dominio de las bases lógicas, demostraciones y cálculo de áreas básicas. Y de la misma manera la geometría espacial y el fractal, conducen al modelado de volúmenes y tridimensionalidad, asi como la complejidad, no linealidad y recursividad durante la clase de matemática, lo que permite el desarrollo de la visión espacial en contextos físicos tangibles para mejorar en los estudiantes, la comprensión de procesos dinámicos, algoritmos iterativos y modelización de la naturaleza.

En síntesis, puede decirse que la incorporación de los aspectos geométricos Planos, espaciales y fractales asociados con el análisis espacial avanzado, promueve una enseñanza orientada a la resolución de problemas abiertos, el uso de entornos tecnológicos interactivos y la superación del formalismo abstracto puro, lo que conlleva a conectar saber escolar con la realidad compleja del estudiante, profundizando en cómo se manifiestan estos patrones geométricos en el entorno natural, de allí el interés particular del docente del área matemática. en asumir estructuras geométricas complejas que le autogeneren principios recursivos simples.

Ello logra facilitar la comprensión conceptual de la dimensión no entera, en la búsqueda por articular la enseñanza de los elementos geométricos dentro de los currículos de educación básica o media para fortalecer el pensamiento crítico y la modelización de fenómenos matemáticos complejos. En base a los planteamientos referenciados en la investigación, se hace énfasis en el objetivo general siguiente: Determinar como la geometría plana, la espacial y el fractal, como fundamentos filosóficos de una racionalidad espacial ayuda a afianzar el aprendizaje de la Educación Matemática.

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Entre las teorías que sustentan el artículo referido a; Geometría Plana, Geometría Espacial y Fractales: Fundamentos Filosóficos de una Racionalidad Espacial en la

Educación Matemática. A continuación, se establecen consideraciones de aspectos teóricos sobre la temática objeto de la investigació, en torno a las definiciones de geometría, y los tipos enunciados en el artículo: geometría plana, espacial y fractales, asi como la racionalidad espacial en la educación matemática, desde la perspectiva de diversos autores, lo cual se enfatiza a continuación.

2.1 La geometría plana y la racionalidad euclidiana

La geometría plana constituye un punto de partida fundamental para comprender la racionalidad matemática porque organiza objetos bidimensionales puntos, rectas, polígonos, triángulos, cuadriláteros y circunferencias dentro de un sistema de relaciones definidas. Su importancia filosófica no reside solamente en los resultados geométricos, sino en la forma de organizar el conocimiento mediante principios y deducciones. En el modelo euclidiano, una proposición no adquiere validez por la repetición de ejemplos particulares, sino por su derivación coherente dentro de un sistema de supuestos y reglas de inferencia (Euclides, 2000).

Esta característica permite distinguir entre conocimiento empírico y conocimiento racional. Una figura dibujada puede servir como apoyo sensible, pero la demostración geométrica pretende establecer una relación necesaria que no depende de las imperfecciones del dibujo. Desde el punto de vista educativo, esta diferencia es esencial: cuando el estudiante demuestra una propiedad no se limita a comprobarla en algunos casos, sino que construye un argumento que aspira a justificarla de manera general.

No obstante, la racionalidad euclidiana no debe convertirse en una imagen dogmática de las matemáticas. El desarrollo histórico de las geometrías no euclidianas mostró que era posible construir sistemas coherentes distintos del euclidiano. Este hecho obliga a revisar la idea de que existe una única estructura geométrica posible y abre una discusión epistemológica sobre la relación entre los modelos matemáticos y la realidad (Davis & Hersh, 1988).

2.2 El espacio como forma de la intuición según Kant

La reflexión de Immanuel Kant permite profundizar en el problema filosófico del espacio. Para Kant (1998), el espacio no es simplemente un concepto adquirido a partir de la experiencia, sino una forma de la intuición mediante la cual el sujeto organiza la percepción externa. En esta perspectiva, la geometría posee un estatuto particular porque sus proposiciones pueden ser comprendidas como conocimientos sintéticos a priori, dotados de necesidad y universalidad.

La importancia educativa de esta concepción consiste en mostrar que aprender geometría no equivale únicamente a manipular objetos externos. También implica comprender las condiciones mediante las cuales el sujeto organiza y representa espacialmente aquello que percibe. Sin embargo, la aparición de geometrías diferentes de la euclidiana introduce una tensión productiva: la historia de las matemáticas muestra que las formas de estructurar el espacio pueden ser múltiples. Por ello, la educación geométrica puede aprovechar la perspectiva kantiana como punto de partida para discutir la relación entre intuición, representación, experiencia y construcción matemática, sin presentar una concepción histórica como explicación definitiva.

2.3 Geometría espacial y construcción del conocimiento

La geometría espacial amplía el problema desde las relaciones bidimensionales hacia objetos tridimensionales como prismas, pirámides, cubos, cilindros, conos, esferas y poliedros. Su aprendizaje plantea una dificultad cognitiva específica: el estudiante debe interpretar objetos de tres dimensiones mediante representaciones que, en la mayoría de los casos, aparecen sobre superficies de dos dimensiones. La profundidad, el volumen, la perspectiva, las caras, las aristas y los vértices deben ser coordinados mentalmente.

Los aportes de Piaget e Inhelder permiten comprender esta dimensión como un proceso progresivo de construcción del conocimiento espacial. El espacio no aparece completamente organizado desde el inicio, sino que se estructura mediante la acción, la percepción, la coordinación de perspectivas y la elaboración de representaciones (Piaget & Inhelder, 1984). Esta perspectiva tiene consecuencias didácticas directas: antes de exigir altos niveles de formalización, conviene ofrecer experiencias de manipulación, construcción de sólidos, elaboración de desarrollos planos, dibujo, observación y transformación de objetos.

Investigaciones contemporáneas han corroborado empíricamente esta centralidad del razonamiento espacial en el aprendizaje matemático. El metaanálisis de Atit et al. (2022), que reúne evidencia de más de un centenar de estudios, confirma una relación robusta entre las habilidades espaciales y el desempeño matemático a lo largo de distintos niveles educativos, mientras que Harris (2023) plantea la necesidad de articular las perspectivas cognitivas y educativas del razonamiento espacial para evitar que ambos campos avancen de manera fragmentada. Estos hallazgos actualizan, desde la investigación empírica reciente, la intuición piagetiana según la cual el conocimiento espacial constituye una dimensión cognitiva fundamental para el aprendizaje geométrico.

La enseñanza, por tanto, puede favorecer una transición gradual desde la experiencia hacia la representación y desde la representación hacia la formalización. Esta secuencia no supone renunciar al rigor; significa reconocer que el rigor matemático requiere condiciones cognitivas y lingüísticas que se construyen progresivamente. La representación tridimensional puede ser utilizada como mediadora entre la percepción y el razonamiento formal, haciendo visible la relación entre diferentes puntos de vista de un mismo objeto.

2.4 El modelo de niveles del razonamiento geométrico de van Hiele

El modelo de Pierre y Diana van Hiele complementan la perspectiva constructivista al explicar que el razonamiento geométrico progresa mediante niveles cualitativamente diferentes. En términos generales, el estudiante puede avanzar desde la visualización de figuras hacia el análisis de propiedades, el establecimiento de relaciones, la deducción formal y niveles de mayor rigor (van Hiele, 1986). Esta propuesta tiene una consecuencia didáctica importante: la demostración formal no debería considerarse necesariamente el punto de partida.

Desde esta perspectiva, existe una tensión entre dos maneras de enseñar geometría. Una puede centrarse en la transmisión inmediata de definiciones, fórmulas y teoremas; la otra entiende el aprendizaje como un proceso de construcción conceptual en el que la visualización y la exploración preparan formas más complejas de razonamiento. La segunda orientación resulta coherente con una educación matemática que busca desarrollar pensamiento crítico y no solamente memoria procedimental.

Así, una actividad geométrica puede comenzar con la observación y clasificación de figuras, continuar con la identificación de propiedades y relaciones, y avanzar posteriormente hacia la formulación y justificación de conjeturas. La demostración adquiere entonces un sentido intelectual más profundo: deja de ser una secuencia de pasos que el estudiante memoriza y se convierte en una forma de argumentación que responde a una necesidad surgida del propio proceso de investigación.

El modelo de van Hiele continúa siendo objeto de investigación activa. Arnal-Bailera y Manero (2024), mediante un estudio Delphi con expertos, han propuesto una caracterización actualizada del quinto nivel de razonamiento geométrico el de mayor rigor y abstracción, lo cual evidencia que la progresión descrita originalmente por van Hiele sigue siendo un marco vigente para comprender el desarrollo del razonamiento geométrico avanzado. En una línea complementaria, Nogueira et al. (2025) han diseñado y validado un instrumento para analizar el pensamiento espacial desde la educación infantil, lo que confirma que la preocupación por el

desarrollo progresivo del pensamiento espacial ya presente en Piaget, Inhelder y van Hiele continúa orientando la investigación actual en educación matemática.

2.5 Geometría fractal y racionalidad de la complejidad

La geometría fractal introduce una transformación significativa en la manera de comprender las formas geométricas. Mandelbrot (1997) mostró que numerosas formas de la naturaleza presentan irregularidades que no son adecuadamente descritas mediante las figuras regulares de la geometría clásica. Costas, montañas, nubes y estructuras vegetales exhiben configuraciones complejas que desafían las representaciones basadas exclusivamente en líneas, superficies y sólidos ideales.

Los fractales permiten trabajar con propiedades como la autosimilitud y la dimensión fraccionaria. La dimensión fractal amplía el concepto tradicional de dimensión al ofrecer herramientas para representar grados de irregularidad que no encajan en la clasificación clásica de punto, línea, superficie y volumen. Esta ampliación no elimina la geometría euclidiana; muestra, más bien, que los modelos matemáticos poseen determinados ámbitos de aplicación y que pueden requerir extensiones cuando se enfrentan con nuevos problemas.

Desde el punto de vista epistemológico, esta situación se relaciona con la propuesta cuasi-empirista de Lakatos (1978). El desarrollo matemático puede comprenderse como una actividad en la que las conjeturas, los contraejemplos, las refutaciones y las reformulaciones desempeñan un papel importante. La geometría fractal puede interpretarse, en este marco, como una muestra de la capacidad de la matemática para ampliar sus herramientas conceptuales cuando los modelos disponibles resultan insuficientes para determinados fenómenos.

Esta lectura del cuasi-empirismo lakatosiano no pertenece únicamente al pasado de la filosofía de la matemática. Zeng (2022), en un número especial de la revista Kriterion dedicado a revisar la obra inconclusa de Lakatos, muestra que la tensión entre una matemática cuasi-empírica y una matemática fundacionalista continúa siendo objeto de debate filosófico contemporáneo, lo cual confirma la vigencia de esta perspectiva para pensar críticamente la naturaleza del conocimiento matemático escolar.

La geometría fractal tiene además un potencial educativo particular porque favorece la discusión sobre la relación entre modelo y realidad. El estudiante puede reconocer que un modelo matemático no es una copia completa e inmutable del mundo, sino una construcción que permite estudiar ciertos aspectos de un fenómeno. Cuando el modelo resulta insuficiente, la respuesta científica no consiste

necesariamente en abandonar la matemática, sino en modificar, ampliar o construir nuevas representaciones.

2.6 La geometría como racionalidad espacial integrada

La articulación de las tres geometrías permite reconocer una continuidad epistemológica. La geometría plana representa la fuerza de la deducción y la organización axiomática; la geometría espacial evidencia la necesidad de construir progresivamente estructuras de representación; y la geometría fractal muestra que los modelos pueden ampliarse frente a fenómenos complejos. Esta secuencia no debe entenderse como una sustitución de una geometría por otra, sino como una ampliación de las posibilidades de comprender el espacio.

El aporte central de esta lectura integrada es que permite relacionar historia de la geometría, filosofía de las matemáticas y educación matemática. Las concepciones acerca de qué es un objeto matemático, cómo se justifica una proposición y cómo se construye el conocimiento influyen inevitablemente en la manera de enseñar. El platonismo, por ejemplo, puede asociarse con una visión de los objetos matemáticos como entidades ideales que se descubren; el idealismo trascendental enfatiza las condiciones de posibilidad de la experiencia espacial; el constructivismo destaca la construcción progresiva de estructuras cognitivas; y el cuasi-empirismo subraya el carácter histórico y revisable del conocimiento.

Esta integración permite también comprender que la enseñanza geométrica puede convertirse en un espacio para desarrollar formas de pensamiento que exceden el cálculo. La comparación entre figuras regulares e irregulares, la construcción de modelos tridimensionales, la exploración de transformaciones, la elaboración de conjeturas y la discusión de los límites de una representación pueden promover capacidades de argumentación, interpretación y reflexión. En este sentido, el contenido geométrico funciona como medio para formar pensamiento matemático y pensamiento crítico simultáneamente.

2.7 Implicaciones para la educación matemática

Una primera implicación es la necesidad de superar una enseñanza centrada exclusivamente en la memorización de fórmulas. Las fórmulas son importantes, pero adquieren mayor sentido cuando aparecen vinculadas con problemas, representaciones, relaciones y argumentos. La geometría puede ser enseñada como una actividad de construcción de significado, en la que el estudiante observa, manipula, representa, formula preguntas, establece relaciones, conjetura, prueba y comunica.

Esta necesidad ha sido señalada también por investigaciones recientes en formación docente. Boadu y Bonyah (2024) sostienen que la formación inicial de profesores de matemáticas debe incorporar explícitamente la reflexión filosófica sobre la naturaleza del conocimiento matemático, pues las creencias epistemológicas de los futuros docentes inciden directamente en sus decisiones didácticas y en la imagen de la matemática que transmiten a sus estudiantes. Este planteamiento respalda, desde la investigación actual en formación de profesores, el argumento central de este ensayo: la reflexión filosófica no es un añadido opcional a la educación matemática, sino una dimensión constitutiva de la formación de quienes habrán de enseñarla.

Una segunda implicación es la conveniencia de diseñar secuencias didácticas que respeten la progresión del razonamiento. Las actividades pueden partir de situaciones de visualización y exploración, avanzar hacia la identificación de propiedades y relaciones y culminar en procesos de argumentación y demostración. Este enfoque coincide con la idea de que la matemática debe ser reconstruida por quien aprende y no simplemente recibida como un producto terminado (Freudenthal, 1991).

Una tercera implicación consiste en incorporar situaciones en las que los estudiantes comparen diferentes modelos de representación espacial. Por ejemplo, un objeto tridimensional puede ser observado directamente, dibujado en perspectiva, representado mediante un desarrollo plano y modelado digitalmente. Cada representación destaca ciertas propiedades y oculta otras. La comparación permite desarrollar conciencia sobre el carácter selectivo de los modelos y sobre la relación entre representación y objeto.

Finalmente, la geometría fractal ofrece oportunidades para conectar las matemáticas escolares con fenómenos naturales y tecnológicos. La exploración de autosimilitud, iteración, dimensión fractal y generación de figuras puede favorecer una comprensión más amplia de la modelización. En lugar de presentar los fractales como una curiosidad aislada, pueden utilizarse para discutir cómo una idea matemática sencilla puede producir estructuras de gran complejidad y cómo los modelos matemáticos se transforman cuando intentan describir nuevos fenómenos.

3. METODOLOGÍA

El articulo científico se desarrolló mediante un enfoque cualitativo, documental y argumentativo, donde la estrategia consistió en revisar y articular los materiales de trabajo sobre geometría plana, geometría espacial, geometría fractal, filosofía de las matemáticas y educación matemática, integrando los contenidos de los tres avances previos en una arquitectura única. El análisis se organizó alrededor de tres

dimensiones: primero, la racionalidad axiomático-deductiva asociada con Euclides y la reflexión kantiana sobre el espacio; segundo, la construcción cognitiva de las representaciones espaciales desde Piaget e Inhelder y los niveles de razonamiento de van Hiele; y tercero, la racionalidad de la complejidad vinculada con Mandelbrot y el carácter revisable del conocimiento matemático en Lakatos.

El procedimiento fue de carácter interpretativo, mediante el cual se identificaron conceptos recurrentes, se eliminaron repeticiones entre los documentos, se reorganizaron los argumentos en una secuencia lineal de introducción, desarrollo y conclusión, y se conservaron las investigaciones centrales de los materiales originales. Asimismo, se verificaron datos bibliográficos básicos de varias fuentes mediante catálogos y registros bibliográficos en línea.

4. RESULTADOS

Luego de la revisión documental realizada, estas se organizaron con matrices que destacan las categorías de análisis, junto con las características y propiedades más relevantes de los temas objeto de estudio relacionados con la geometría plana, geometría espacial y el fractal como expresiones articuladas de una racionalidad espacial matemática, las cuales se muestran en las Tabla 1 a la 3.

Tabla 1

Matriz documental sobre La geometría plana y la racionalidad euclidiana

Categorías	Características	Propiedades
Geometría plana y la racionalidad euclidiana. Davis & Hersh (1988). Euclides (2000).	Constituye un punto de partida fundamental para comprender la racionalidad matemática organiza objetos bidimensionales puntos, rectas dentro de un sistema de relaciones definidas Su importancia filosófica no reside solamente en los resultados geométricos . Permite distinguir entre conocimiento empírico y conocimiento racional	Entre sus propiedades destaca la forma de organizar el conocimiento mediante principios y deducciones. Como modelo euclidiano no adquiere validez por la repetición de ejemplos particulares, sino por su derivación coherente dentro de un sistema de supuestos y reglas de inferencia Otra propiedad es que permite la demostración geométrica para establecer una relación necesaria que no depende de las imperfecciones del dibujo. La racionalidad euclidiana no debe convertirse en una imagen dogmática de la matemática.

En la Tabla 2 se presenta una matriz documental donde se sintetizan los hallazgos de más relevancia expresados en la categoría de análisis documental sobre: Matriz documental sobre Geometría espacial y construcción del conocimiento, exponiendo sus características y propiedades obtenidas del análisis interpretativo realizado a las fuentes documentales consultadas, donde se estableció la necesidad de articular las perspectivas cognitivas y educativas del razonamiento espacial para evitar que ambos campos avancen de manera fragmentada. Así mismo pudo visualizarse desde la investigación empírica reciente, la intuición piagetiana según la cual el conocimiento espacial que la geometría espacial constituye una dimensión

cognitiva fundamental para el aprendizaje geométrico en estudiantes de todos los niveles educativos, al ser utilizada por el docente como mediadora entre la percepción y el razonamiento formal haciendo visible la relación entre diferentes puntos de vista de a la exploración de sistemas alternativos matemáticos.

Tabla 3.

Matriz documental sobre Geometría fractal racionalidad de la complejidad

Categorías	Características	Propiedades
	Introduce una transformación significativa en la manera de comprender las formas geométricas.	La geometría fractal tiene como propiedad el desarrollo de la autosimilitud y la dimensión fraccionaria
Geometría fractal y racionalidad Lakatos (1978). Zeng (2022),	Describes mediante las figuras regulares de la geometría clásica. Exhibe configuraciones complejas que desafían las representaciones basadas en líneas, superficies y sólidos ideales. La geometría fractal puede interpretarse, en este marco, como una muestra de la capacidad de la matemática	La dimensión fractal amplía el concepto tradicional geométrico al ofrecer herramientas para solventar irregularidades que no encajan en la clasificación clásica Tiene la propiedad que su aplicación no elimina la geometría euclidiana al centrarse en modelos matemáticos en determinados ámbitos de aplicación y que pueden requerir extensiones cuando se enfrentan con nuevos problemas.

En la Tabla 3 se presenta una matriz documental donde se sintetizan los hallazgos de más relevancia expresados en la categoría de análisis documental sobre: Geometría fractal y racionalidad de la complejidad, donde se exponen sus características y propiedades respectivas, obtenidas del análisis interpretativo realizado a las fuentes documentales consultadas, donde se hizo observancia que partiendo de la geometría fractal, el desarrollo matemático puede comprenderse como una actividad donde las conjeturas, contraejemplos, refutaciones y reformulaciones desempeñan un papel importante para el fortalecimiento de la racionalidad euclidiana, como una imagen dogmática de las matemáticas y donde el desarrollo histórico de las geometrías no euclidianas, refieren que es posible construir sistemas coherentes distintos, lo que obliga al docente del área matemática a revisar las ideas de que existe en una única estructura geométrica posible, lo cual también le permite abrir una discusión epistemológica sobre la relación entre los modelos matemáticos y la realidad observada hoy dia en el ámbito escolar.

5. CONCLUSIONES

Las conclusiones corresponden a una reflexión teórica y educativa derivada del análisis documental, dónde el análisis realizado permite sostener que la geometría plana, la geometría espacial y la geometría fractal, pueden ser comprendidas como expresiones diferenciadas de una racionalidad espacial que se transforma

históricamente. Es así como la geometría plana muestra la potencia de organización axiomática y deductiva; y en el mismo orden de ideas la geometría espacial evidencia que la comprensión de las relaciones tridimensionales lo que exige procesos progresivos de construcción y representación; y de igual manera la geometría fractal revela que los modelos matemáticos pueden ampliarse cuando deben abordar formas irregulares y fenómenos complejos.

Así mismo se concluye que la principal consecuencia para la educación matemática es que enseñar geometría significa también transmitir una concepción acerca de qué es conocer matemáticamente, ya que en la medida que el docente privilegia la demostración, comunica una determinada idea de validación; y cuando propone manipulación o exploración, reconoce la construcción progresiva del conocimiento; y cuando utiliza modelos fractales, puede mostrar que la matemática es capaz de revisar y ampliar sus categorías, por ello, la dimensión filosófica no debe verse como un añadido externo al currículo, sino como un componente que ayuda a comprender el sentido de las prácticas matemáticas.

Como reflexión puede decirse, que la integración propuesta no pretende convertir la clase de matemáticas en un curso de filosofía, ya que su finalidad es ofrecer al docente herramientas para interpretar sus decisiones didácticas y para construir experiencias de aprendizaje donde los estudiantes puedan distinguir entre objeto y representación, entre modelo y realidad, entre verificación particular y demostración general, y entre conocimiento establecido y conocimiento susceptible de revisión.

6. REFERENCIAS

Arnal-Bailera, A., y Manero, V. (2024). Una caracterización del nivel 5 del razonamiento geométrico de van Hiele mediante la metodología Delphi. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *22*(3), 537–560. https://doi.org/10.1007/s10763-023-10380-z

Atit, K., Power, J. R., Pigott, T., Lee, J., Geer, E. A., Uttal, D. H., Ganley, C. M., y Sorby, S. A. (2022). Examen de las relaciones entre las habilidades espaciales y el rendimiento matemático: Un meta-análisis. *Psychonomic Bulletin & Review*, *29*(3), 699–720. https://doi.org/10.3758/s13423-021-02012-

Boadu, S. K., y Bonyah, E. (2024). El papel de la filosofía de la educación matemática en la formación del profesorado de matemáticas. *Cogent Education*, *11*(1), Artículo 2433832. https://doi.org/10.1080/2331186X.2024.2433832

Davis, P. J., & Hersh, R. (1988). Experiencia matemática (J. Tomás Fuertes, Trad.). Labor/Ministerio de Educación y Ciencia. https://books.google.com.co/books/about/The_Mathematical_Experience.html?id=lMdz84dWNnAC&redir_esc=y

Euclides. (2000). Elementos (M. L. Puertas Castaños, Trad.). Editorial Gredos. https://dn790000.ca.archive.org/0/items/ColeccionObrasGrecoLatinas3/462.Euclides-Elementos-Libro-1.pdf.

Freudenthal, H. (1991). *Revisando la educación matemática: Conferencias en China*. Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47202-3

Harris, D. (2023). El razonamiento espacial en contexto: Uniendo las perspectivas cognitiva y educativa de las relaciones entre espacio y matemáticas. *Frontiers in Education*, *8*, Artículo 1302099. https://doi.org/10.3389/feduc.2023.1302099

Kant, I. (1998). Crítica de la razón pura (P. Ribas, Trad.). Alfaguara. https://www.mercaba.es/ilustracion/razon_pura_de_kant.pdf

Lakatos, I. (1978). Pruebas y refutaciones: La lógica del descubrimiento matemático (C. Alchourrón, Trad.). Alianza Editorial. https://mdc.ulpgc.es/files/original/13ef6701e6a3e8163cc87be48582ec407205edaf.pdf.

Mandelbrot, B. B. (1997). La geometría fractal de la naturaleza (J. Llosa, Trad.). Tusquets Editores https://books.google.com/books/about/ La_geometr%C3%ADa_fractal. _de_la_naturaleza.html?id=C8HG0AEACAAJ

Nogueira, L. G., Fernández Blanco, T., & Maia-Lima, C. (2025). Diseño y validación de un instrumento para analizar el pensamiento espacial en educación infantil. Avances de Investigación en Educación Matemática, 27, 87–105. https://doi.org/10.35763/aiem27.5937

Piaget, J., & Inhelder, B. (1984). La representación del espacio en el niño. Ediciones Morata. https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/ensenanza-y-aprendizaje-de-la-orientacion-espacial/-

Ramírez Arellano, J. E., & Gómez Vargas, J. C. (2020). El conocimiento geométrico como producto filosófico de la razón. Tecnología & Diseño, 8(12).

Van Hiele, P. M. (1986). *Estructura e intuición: Una teoría de la educación matemática*. Academic Press. https://openlibrary.org/books/OL2856090M/Structure_and_insight

Zeng, W. (2022). El cuasi-empirismo de Lakatos revisitado. *Kriterion – Journal of Philosophy*, *36*(2). https://doi.org/10.1515/krt-2022-0007